

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Успенский А.А., Лебедев П.Д., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-204-217>

УДК 514.17



## Альфа-множества и их оболочки: аналитические взаимосвязи в плоском случае

Александр Александрович УСПЕНСКИЙ, Павел Дмитриевич ЛЕБЕДЕВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

**Аннотация.** Рассмотрен класс замкнутых множеств двумерного евклидова пространства, в общем случае не являющихся чебышевскими множествами. Множества изучены с позиций двух известных определений, обобщающих классическое определение выпуклого множества. В рамках этих определений установлены аналитические взаимосвязи между параметрами, характеризующими невыпуклые множества. Найдены формула вычисления функции, определяющей степень невыпуклости замкнутого множества, и формула вычисления радиуса опорного шара. Указаны области приложения изучаемых конструкций в теории управления динамическими системами. Приведен иллюстрирующий пример, в котором предьявлена процедура аналитического вычисления чебышевского слоя невыпуклого множества с разрывной кривизной его границы.

**Ключевые слова:** альфа-множество, оболочка множества, метрическая проекция, мера невыпуклости, биссектриса множества, опорный шар, чебышевский слой, управление

**Благодарности:** Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00424, <https://rscf.ru/project/24-21-00424/>).

**Для цитирования:** Успенский А.А., Лебедев П.Д. Альфа-множества и их оболочки: аналитические взаимосвязи в плоском случае // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 204–217. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-204-217>

SCIENTIFIC ARTICLE

© A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-204-217>

## Alpha sets and their hulls: analytical relationships in the plane case

Alexander A. USPENSKII, Pavel D. LEBEDEV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics  
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences  
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

**Abstract.** The class of closed sets of two-dimensional Euclidean space that are not Chebyshev sets in common case is considered. Sets are studied from the standpoint of two well-known definitions that generalize the classical definition of a convex set. Within the framework of these definitions, analytical relationships are established between the parameters characterizing non-convex sets. A formula for calculating the function that determines the degree of non-convexity of a closed set, and a formula for calculating the radius of the support ball are found. The areas of application of the studied structures in the theory of control of dynamic systems are indicated. An illustrative example is given in which a procedure for analytical calculating the Chebyshev layer of a non-convex set with discontinuous curvature of its boundary is proposed.

**Keywords:** alpha set, hull of a set, metric projection, measure of non-convexity, bisector of a set, support ball, Chebyshev layer, control

**Acknowledgements:** This research of the first author was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00424, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00424/>).

**Mathematics Subject Classification:** 52A10, 49Q15.

**For citation:** Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Alpha sets and their hulls: analytical relationships in the plane case. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 204–217. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-204-217> (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Сфера приложений выпуклых множеств обширна и многообразна. Между тем в приложениях, в частности, в теории математического управления зачастую приходится иметь дело с невыпуклыми множествами. В ряде случаев такие множества могут рассматриваться в качестве обобщений выпуклых множеств. Среди обобщений понятия выпуклого множества выделим понятие альфа-множества ( $\alpha$ -множества) [1]. Следует различать это понятие с понятием  $\alpha$ -выпуклого множества, которое введено в работе [2]. Возникновение понятия альфа-множества связано с изучением свойств множеств достижимости управляемых динамических систем. Присущая множествам достижимости невыпуклость имеет разную степень выраженности. Для конкретного множества в качестве числовой характеристики его степени невыпуклости в [1] предложена неотрицательная константа  $\alpha$ , являющаяся супремальным значением характеристической функции, определенной на дополнении множества до всего пространства. Значения функции имеют смысл угловых величин, вычисляемых между векторами, порожденными ближайшими точками на множестве. Нарушение единственности метрической проекции точки из дополнения множества на само множество указывает на его принадлежность семейству нечебышевских множеств [3].

Обзор обобщений понятия выпуклого множества приведен в монографии [4]. Свойства оператора метрической проекции рассмотрены для класса слабо выпуклых по Виалю множеств и класса сильно выпуклых множеств в [5, 6]. В частности, показано, что такие множества обладают чебышевскими слоями, в которых оператор непрерывен и для него в рамках каждого класса множеств найдена константа Липшица. Оператор метрической проекции также используется при описании свойств классического (дифференцируемого) решения уравнения эйконала для случая, когда краевое множество является солнцем [7]. В упомянутых здесь работах существенным условием является единственность значений оператора метрической проекции.

Конструкции теории альфа-множеств позволяют исследовать ситуации множественности значений оператора метрической проекции. К настоящему времени выявлены и описаны характерные признаки и особенности замкнутых множеств евклидова пространства в терминах характеристической функции, введены в рассмотрение основные структурные элементы развиваемой теории (биссектриса множества, псевдовершина множества, крайняя точка биссектрисы) [8]. Осуществлена классификация невыпуклых множеств по признакам регулярности и мажорируемости (в силу введенных определений), а для некоторых классов невыпуклых множеств сформулированы и доказаны утверждения, аналогичные теоремам из выпуклого анализа о существовании опорной гиперплоскости выпуклого множества и об отделимости выпуклых множеств в евклидовом пространстве [9].

Конструкции теории альфа-множеств приложены к построению негладких решений задач управления по быстродействию и задач геометрической оптики (см., например, [10, 11]), применены при исследовании свойств множеств достижимости нелинейных управляемых динамических систем (см. [12]).

В настоящей работе для плоских замкнутых и в классическом смысле невыпуклых множеств получены аналитические соотношения, позволяющие в ряде случаев находить точно меру невыпуклости  $\alpha$ . Также выявлены аналитические взаимосвязи между плоскими альфа-множествами и их оболочками в силу определений [2].

## 1. Основные определения, понятия и предварительные результаты

Ключевым в настоящей работе является понятие  $\alpha$ -множества, введенное в статье [1].

Пусть  $M$  — замкнутое множество в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  и  $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$ . Под проекцией  $\pi(z)$  точки  $z$  на  $M$  понимается ближайшая к  $z$  точка из  $M$  в евклидовой метрике.

Полагаем

$\Omega_M(z) = \{\pi(z)\}$  — множество всех проекций  $\pi(z)$  точки  $z$  на  $M$ ;

$\text{co}\Omega_M(z)$  — выпуклая оболочка множества  $\Omega_M(z)$ ;

$\text{con}(\text{co}\Omega_M(z) - z) = \{h = \lambda(s - z) : \lambda \geq 0, s \in \text{co}\Omega_M(z)\}$  — конус в  $\mathbb{R}^n$ , натянутый на  $\text{co}\Omega_M(z) - z$ ;

$H_M(z)$  — множество всевозможных пар  $(h_*, h^*)$  ненулевых векторов  $h_*, h^*$  из конуса  $\text{con}(\text{co}\Omega_M(z) - z)$ ;

$(h_* \wedge h^*) = \arccos \frac{\langle h_*, h^* \rangle}{\|h_*\| \|h^*\|} \in [0, \pi]$  — угол между векторами  $h_*$  и  $h^*$ ,  $(h_*, h^*) \in H_M(z)$ ;

$\langle h_*, h^* \rangle$  — скалярное произведение векторов  $h_*$  и  $h^*$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|h_*\| = \langle h_*, h_* \rangle^{\frac{1}{2}}$ ;

$$\alpha(z) = \max_{(h_*, h^*) \in H_M(z)} (h_* \wedge h^*) \in [0, \pi].$$

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Множество  $M$  называется  $\alpha$ -множеством в  $\mathbb{R}^n$ . Величина

$$\alpha = \sup_{z \in \mathbb{R}^n \setminus M} \alpha(z) \in [0, \pi]$$

называется *мерой невыпуклости множества  $M$* .

Приведем определения ряда конструктивных элементов теории  $\alpha$ -множеств, сконцентрировавшись на плоском случае, когда  $M \subset \mathbb{R}^2$ . В дальнейшем предполагается, что граница  $\Gamma = \partial M$  замкнутого множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  задается непрерывным отображением  $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$  числового отрезка  $T = [\check{t}, \hat{t}]$ ,  $-\infty < \check{t} < \hat{t} < +\infty$ ,  $\gamma(\check{t}) = \gamma(\hat{t})$ , или же числовой прямой  $T = \mathbb{R}$ , на плоскость, которое, вообще говоря, может иметь конечное число точек разрыва производных начальных порядков (до третьего порядка включительно) от координатных функций. Следует подчеркнуть, что дифференциальные свойства  $\Gamma$  существенным образом влияют на структуру носителя  $\text{supp } \alpha = \overline{\{z \in \mathbb{R}^2 \setminus M : \alpha(z) \neq 0\}}$  функции  $\alpha(\cdot)$  и, как следствие, определяют сложность вычисления меры невыпуклости множества  $M$ . Здесь  $\bar{A}$  — замыкание  $A$ .

Задача отыскания меры невыпуклости множества решается с помощью уравнения, связывающего носитель функции  $\text{supp } \alpha$  с границей множества:

$$Q(t_1, t_2) = 0. \tag{1.1}$$

Структура уравнения конкретизирована ниже. Предварительно укажем на то, что  $Q = Q(t_1, t_2)$  — симметрическая функция двух переменных в плоскости параметров  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ . Важная роль в теории отводится решениям (1.1) со специальными свойствами. Зафиксируем  $t_0 \in T$ , параметры малости  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ . Под решениями этого уравнения понимаются локальные диффеоморфизмы [13, §1], определенные с одной стороны от точки рассмотрения. Будем говорить, что локальный диффеоморфизм  $t_2 = t_2(t_1)$ , определенный уравнением (1.1), полунепрерывен слева в точке  $t_1 = t_0$  и отображает левую полукрестность точки  $t_1 = t_0$  в ее правую полукрестность, если выполняются условия:

**(A1)**  $t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2)$ ,  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ ,

**(A2)**  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0$ .

Наряду с полунепрерывностью функции  $t_2 = t_2(t_1)$  условия **(A1)**, **(A2)** выделяют неподвижные точки в пространстве параметров. Существование таких точек и их определяющих локальных диффеоморфизмов показано на примерах множеств с разным порядком гладкости их границ [14].

**О п р е д е л е н и е 1.2.** *Псевдовершиной кривой  $\Gamma$*  называется точка

$$x^{(0)} = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} (x_1^*, x_2^*),$$

где  $(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*(t_1, t_2(t_1)), x_2^*(t_1, t_2(t_1)))$  — однопараметрическое подмножество решений  $(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*(t_1, t_2), x_2^*(t_1, t_2))$  системы уравнений

$$\begin{cases} (x_1^* - \gamma_1(t_1))\gamma_2'(t_1) = (x_2^* - \gamma_2(t_1))\gamma_1'(t_1), \\ (x_1^* - \gamma_1(t_2))\gamma_2'(t_2) = (x_2^* - \gamma_2(t_2))\gamma_1'(t_2), \end{cases} \quad (1.2)$$

определяемое локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$ , который задается уравнением

$$Q(t_1, t_2) \triangleq \rho^2(\gamma(t_1), (x_1^*, x_2^*)) - \rho^2(\gamma(t_2), (x_1^*, x_2^*)) = 0 \quad (1.3)$$

и удовлетворяет условиям **(A1)**, **(A2)**. Здесь,  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $y \in \mathbb{R}^2$ .

Уравнение (1.3) конкретизирует (1.1).

Определение псевдовершины допускает естественную переформулировку в терминах обратного к  $t_2 = t_2(t_1)$  локального диффеоморфизма  $t_1 = t_1(t_2)$ , удовлетворяющего условиям **(A1)**, **(A2)**. Поэтому будем называть  $t_2 = t_2(t_1)$  и  $t_1 = t_1(t_2)$  локальными диффеоморфизмами, порождающими псевдовершину  $x^{(0)} \in \Gamma$ .

Рассмотрим оператор метрической проекции  $P_M(z)$  точек  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus M$  на  $M$ . Обозначим  $\text{card } P_M(z)$  мощность множества проекций точки  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus M$  на  $M$ .

**О п р е д е л е н и е 1.3.** *Биссектрисой множества  $M \subset \mathbb{R}^2$*  называется

$$L = \{z \in \mathbb{R}^2 \setminus M : \text{card } P_M(z) > 1\}.$$

Биссектриса  $L$  множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  состоит из точек, в которых нарушается гладкость евклидова расстояния до множества. Биссектриса относится к множествам симметрии, топологические свойства которых изучаются в теории особенностей гладких отображений (см., например, [15]).

**О п р е д е л е н и е 1.4.** *Ветвью  $L(x^{(0)})$  биссектрисы  $L$  кривой  $\Gamma$* , где  $x^{(0)}$  — псевдовершина  $\Gamma$ , называется множество точек  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (x_1 - \gamma_1(t_1))\gamma_1'(t_1) + (x_2 - \gamma_2(t_1))\gamma_2'(t_1) = 0, \\ (x_1 - \gamma_1(t_2))\gamma_1'(t_2) + (x_2 - \gamma_2(t_2))\gamma_2'(t_2) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $t_2 = t_2(t_1)$  — локальный диффеоморфизм, порождающий псевдовершину  $x^{(0)}$ .

Система уравнений (1.4) является сопряженной к системе (1.2). Ее решениями являются точки  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , имеющие две различные ближайшие точки на  $\Gamma = \partial M$ . В силу определения носителя характеристической функции выполнено  $L(x^{(0)}) \subset \text{supp } \alpha$ .

## 2. Вычисление значений характеристической функции на биссектрисе

Задача вычисления меры невыпуклости множества  $M$  по существу требует построения носителя характеристической функции  $\text{supp } \alpha$ , т. е. замыкания множества из ее области определения, на котором функция отлична от нуля. Функция  $\alpha_M(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$ , полунепрерывна сверху [1], в общем случае она является разрывной. Ниже обоснована формула ее вычисления для ряда случаев. Результат сформулирован в локальных терминах, он справедлив в некоторой окрестности особой точки границы множества. При этом стоит отметить, что результат приобретает нелокальный характер в случае, когда эта точка является единственной особой точкой границы множества. Этот тезис будет проиллюстрирован далее в примере. Содержательно приводимая ниже теорема позволяет находить значения характеристической функции на гладких участках биссектрисы.

Примем ряд обозначений:  $\det(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$  — определитель второго порядка, построенный на векторах  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$ ,  $\langle a, b \rangle$  — скалярное произведение этих векторов,  $O_0(t_0, \Delta) = (t_0 - \Delta, t_0 + \Delta) \setminus \{t_0\}$  — выколота окрестность точки  $t_0 \in T$  радиуса  $\Delta > 0$ . Пусть  $K = \{1, 2, 3\}$ .

Ограничимся рассмотрением кривых, для которых выполняются следующие условия:

**(Г1)**  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  имеет непрерывную производную  $k$ -го порядка, где  $k \in K$ , всюду на  $T \subseteq \mathbb{R}$ , при этом допускается существование конечных совокупностей  $T_k \subset T$  точек  $t_0 \in T_k$ , в которых односторонние производные  $k$ -го порядка (левая  $\gamma^{(k)}(t_0 - 0)$  и правая  $\gamma^{(k)}(t_0 + 0)$ ) конечны и при этом  $\gamma^{(k)}(t_0 - 0) \neq \gamma^{(k)}(t_0 + 0)$ ;

**(Г2)**  $\gamma'(t) \neq 0$ ,  $t \in T \setminus T_1$ .

Совокупности кривых  $\Gamma$  без точек самопересечения с указанными дифференциальными свойствами **(Г1)**, **(Г2)** обозначим  $\{\Gamma\}_T$ . Условие **(Г1)** фиксирует наличие точек с разрывами производных координатных функций — особых точек, которые порождают непустые подмножества из  $\text{supp } \alpha$ , а **(Г2)** — это условие регулярности кривой в точках дифференцируемости (подробнее см. в [11, 14]).

**Теорема 2.1.** Пусть  $L(x^{(0)})$  — ветвь биссектрисы  $L$  множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  с границей  $\Gamma = \partial M \in \{\Gamma\}_T$ , определяемой вектор-функцией  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ , где  $x^{(0)}$  — псевдовершина  $\Gamma$ , порожденная локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$ ,  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ , и выполняется условие

$$\det(\gamma'(t), \gamma'(\tau)) \neq 0, \quad t \in O_0(t_0, \Delta), \quad \tau \in O_0(t_0, \Delta), \quad \Delta > 0, \quad t \neq \tau. \quad (2.1)$$

Тогда для точек  $z(t_1) = (x_1, x_2) \in L(x^{(0)})$  имеет место формула вычисления угловой величины

$$\alpha(z(t_1)) = 2 \arctg \left| \frac{\det(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle} \right|. \quad (2.2)$$

**Доказательство.** Зафиксируем значение параметра  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ ,  $\delta_1 > 0$ , и отвечающее ему в силу диффеоморфизма значение  $t_2 = t_2(t_1)$ ,  $t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)$ ,  $\delta_2 > 0$ . По построению  $t_1 < t_0 < t_2(t_1)$ . Найдем точку  $(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*(t_1, t_2(t_1)), x_2^*(t_1, t_2(t_1)))$  пересечения касательных, равноудаленную от точек касания  $\gamma(t_1)$  и  $\gamma(t_2)$ . Для этого решим соответствующую систему линейных уравнений (1.2), здесь для краткости аргумент в

$t_2(t_1)$  опущен:

$$\begin{aligned} x_1^* &= -\frac{\begin{vmatrix} \gamma_1(t_1)\gamma_2'(t_1) & \gamma_1'(t_1) \\ \gamma_1(t_2)\gamma_2'(t_2) & \gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} + \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2(t_1)\gamma_1'(t_1) & \gamma_1'(t_1) \\ \gamma_2(t_2)\gamma_1'(t_2) & \gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))}, \\ x_2^* &= \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2'(t_1) & \gamma_1(t_1)\gamma_2'(t_1) \\ \gamma_2'(t_2) & \gamma_1(t_2)\gamma_2'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} - \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2'(t_1) & \gamma_2(t_1)\gamma_1'(t_1) \\ \gamma_2'(t_2) & \gamma_2(t_2)\gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Перейдем к сопряженной системе (1.4) и найдем ее решение:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1(t_1)\gamma_1'(t_1) & \gamma_2'(t_1) \\ \gamma_1(t_2)\gamma_1'(t_2) & \gamma_2'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} + \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2(t_1)\gamma_2'(t_1) & \gamma_2'(t_1) \\ \gamma_2(t_2)\gamma_2'(t_2) & \gamma_2'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))}, \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1'(t_1) & \gamma_1(t_1)\gamma_1'(t_1) \\ \gamma_1'(t_2) & \gamma_1(t_2)\gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} + \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1'(t_1) & \gamma_2(t_1)\gamma_2'(t_1) \\ \gamma_1'(t_2) & \gamma_2(t_2)\gamma_2'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Формулы (2.3) и (2.4) корректны в силу условия (1.2).

Вычислим значение угловой величины на ветви  $L(x^{(0)})$  биссектрисы, принимая во внимание ортогональность отрезков прямых, задаваемых системами (1.2) и (1.4), и равнолежность тех из них, что являются высотами, и тех, что являются отрезками касательных (поясняющий детали рисунок в [14]). Имеем  $\operatorname{tg} \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \frac{\rho(x^*, \gamma(t_1))}{\rho(x, \gamma(t_1))}$ . Далее последовательно найдем числитель и знаменатель квадрата тангенса

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \frac{\rho^2(x^*, \gamma(t_1))}{\rho^2(x, \gamma(t_1))}. \quad (2.5)$$

В процессе выкладок опустим часть вычислений, которые громоздки, не представляют математического интереса и при необходимости могут быть легко восстановимы. Числитель дроби

$$\begin{aligned} \rho^2(x^*, \gamma(t_1)) &= (x_1^* - \gamma_1(t_1))^2 + (x_2^* - \gamma_2(t_1))^2 \\ &= \left( -\frac{\begin{vmatrix} \gamma_1(t_1)\gamma_2'(t_1) & \gamma_1'(t_1) \\ \gamma_1(t_2)\gamma_2'(t_2) & \gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} + \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2(t_1)\gamma_1'(t_1) & \gamma_1'(t_1) \\ \gamma_2(t_2)\gamma_1'(t_2) & \gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} - \gamma_1(t_1) \right)^2 \\ &\quad + \left( \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2'(t_1) & \gamma_1(t_1)\gamma_2'(t_1) \\ \gamma_2'(t_2) & \gamma_1(t_2)\gamma_2'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} - \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2'(t_1) & \gamma_2(t_1)\gamma_1'(t_1) \\ \gamma_2'(t_2) & \gamma_2(t_2)\gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} - \gamma_2(t_1) \right)^2 \\ &= \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \left( (\gamma_2'(t_1))^2 (\gamma_2'(t_2))^2 (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 + (\gamma_1'(t_1))^2 (\gamma_1'(t_2))^2 \right. \\ &\quad \times (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))^2 + (\gamma_1^2(t_1) + \gamma_2^2(t_1)) \left. \begin{vmatrix} \gamma_1'(t_1) & \gamma_2'(t_1) \\ \gamma_1'(t_2) & \gamma_2'(t_2) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_2'(t_1) & \gamma_2(t_1)\gamma_1'(t_1) \\ \gamma_2'(t_2) & \gamma_2(t_2)\gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}^2 \right. \\ &\quad + 2\gamma_2(t_1) \begin{vmatrix} \gamma_2'(t_1) & \gamma_2(t_1)\gamma_1'(t_1) \\ \gamma_2'(t_2) & \gamma_2(t_2)\gamma_1'(t_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1'(t_1) & \gamma_2'(t_1) \\ \gamma_1'(t_2) & \gamma_2'(t_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1(t_1)\gamma_2'(t_1) & \gamma_1'(t_1) \\ \gamma_1(t_2)\gamma_2'(t_2) & \gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}^2 \\ &\quad \left. + 2\gamma_1(t_1) \begin{vmatrix} \gamma_1(t_1)\gamma_2'(t_1) & \gamma_1'(t_1) \\ \gamma_1(t_2)\gamma_2'(t_2) & \gamma_1'(t_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1'(t_1) & \gamma_2'(t_1) \\ \gamma_1'(t_2) & \gamma_2'(t_2) \end{vmatrix} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \|\gamma'(t_1)\|^2 \gamma'_2(t_2) \gamma'_1(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \left( (\gamma'_2(t_1))^2 (\gamma'_2(t_2))^2 (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 + (\gamma'_1(t_1))^2 \right. \\
& \quad \times (\gamma'_1(t_2))^2 (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))^2 + (\gamma'_2(t_1) \gamma'_1(t_2) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)))^2 + (\gamma'_1(t_1) \gamma'_2(t_2) \\
& \quad \times (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2)))^2 - 2 \|\gamma'(t_1)\|^2 \gamma'_2(t_2) \gamma'_1(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) \Big) \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \|\gamma'(t_1)\|^2 [\gamma'_2(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) - \gamma'_1(t_2) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))]^2 \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \|\gamma'(t_1)\|^2 \det^2(\gamma'(t_2), \gamma(t_2) - \gamma(t_1)). \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Знаменатель дроби

$$\begin{aligned}
\rho^2(x, \gamma(t_1)) & = \left( \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1(t_1) \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma_1(t_2) \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} + \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2(t_1) \gamma'_2(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma_2(t_2) \gamma'_2(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} - \gamma_1(t_1) \right)^2 \\
& \quad + \left( \frac{\begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma_1(t_1) \gamma'_1(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma_1(t_2) \gamma'_1(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} + \frac{\begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma_2(t_1) \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma_2(t_2) \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} - \gamma_2(t_1) \right)^2 \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \left( (\gamma'_2(t_1))^2 (\gamma'_2(t_2))^2 (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 + (\gamma'_1(t_1))^2 (\gamma'_1(t_2))^2 \right. \\
& \quad \times (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))^2 + \left( \gamma_2(t_1) \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma'_2(t_1) & \gamma_2(t_1) \gamma'_1(t_1) \\ \gamma'_2(t_2) & \gamma_2(t_2) \gamma'_1(t_2) \end{vmatrix} \right)^2 \\
& \quad + \left( \gamma_1(t_1) \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1(t_1) \gamma'_2(t_1) & \gamma'_1(t_1) \\ \gamma_1(t_2) \gamma'_2(t_2) & \gamma'_1(t_2) \end{vmatrix} \right)^2 \\
& \quad \left. - 2 \|\gamma'(t_1)\|^2 \gamma'_2(t_2) \gamma'_1(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) \right) \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \left( (\gamma'_1(t_1) \gamma'_1(t_2))^2 (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 + (\gamma'_2(t_1) \gamma'_2(t_2))^2 \right. \\
& \quad \times (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))^2 + \left( \begin{vmatrix} \gamma_1(t_1) \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma_1(t_2) \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} - \gamma_1(t_1) \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} \right)^2 \\
& \quad + \left( \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma_2(t_1) \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma_2(t_2) \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} - \gamma_2(t_1) \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} \right)^2 \\
& \quad + 2 \gamma'_2(t_1) \gamma'_2(t_2) (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2)) \left( \begin{vmatrix} \gamma_1(t_1) \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma_1(t_2) \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} - \gamma_1(t_1) \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} \right) \\
& \quad + 2 \gamma'_1(t_1) \gamma'_1(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) \left( \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma_2(t_1) \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma_2(t_2) \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} - \gamma_2(t_1) \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} \right) \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \left( (\gamma'_1(t_1) \gamma'_1(t_2))^2 (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 + (\gamma'_2(t_1) \gamma'_2(t_2))^2 (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))^2 \right. \\
& \quad + (\gamma'_1(t_2) \gamma'_2(t_1))^2 (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))^2 + (\gamma'_1(t_1) \gamma'_2(t_2))^2 (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))^2 \\
& \quad \left. + 2 (\gamma'_2(t_1))^2 \gamma'_2(t_2) \gamma'_1(t_2) (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2)) (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2)) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(\gamma'_1(t_1))^2 \gamma'_1(t_2) \gamma'_2(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) \Big) \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \left( \|\gamma'(t_1)\|^2 (\gamma'_1(t_2))^2 (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 + (s(t_1))^2 (\gamma'_2(t_2))^2 \right. \\
& \times (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))^2 + 2 \|\gamma'(t_1)\|^2 \gamma'_2(t_2) \gamma'_1(t_2) (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2)) (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2)) \Big) \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \|\gamma'(t_1)\|^2 (\gamma'_1(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) + \gamma'_2(t_2) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)))^2 \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \|\gamma'(t_1)\|^2 \langle \gamma'(t_2), \gamma(t_2) - \gamma(t_1) \rangle^2. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Подставим выражения (2.6) и (2.7) в (2.5), памятуя о том, что здесь  $t_2 = t_2(t_1)$  :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \frac{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1))) \|\gamma'(t_1)\|^2 \det^2(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1))) \|\gamma'(t_1)\|^2 \langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle^2}.$$

Сократим числитель и знаменатель на произведение общих отличных от нуля в силу условий (Г2) и (2.1) сомножителей  $\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))$ ,  $\|\gamma'(t_1)\|^2$ , затем извлечем квадратный корень:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \left| \frac{\det(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle} \right|. \tag{2.8}$$

Из равенства (2.8) получаем требуемую формулу (2.2).  $\square$

### 3. Аналитические взаимосвязи альфа-множества и его $r$ -оболочки в плоском случае

В работе [2], посвященной изучению свойств чебышевских множеств, введено в рассмотрение понятие  $r$ -оболочки множества банахового пространства и изучены опорные свойства таких оболочек, здесь число  $r > 0$ . Вообще говоря, в упомянутой статье авторами используется термин «альфа-оболочка», который в настоящей работе вынужденно скорректирован в его буквенной части, поскольку буква альфа уже использована выше в ином контексте. Заметим также, что в монографии [4] оболочку из [2] предложено называть «множеством, слабо выпуклым по Ефимову–Стечкину с константой альфа».

**О п р е д е л е н и е 3.1.** Пересечение дополнений всех открытых шаров  $E_r(z) \triangleq \{z^* \in \mathbb{R}^n : \|z - z^*\| < r\}$ ,  $r > 0$ , не пересекающихся с  $M$ , называется  $r$ -оболочкой множества  $M \subset \mathbb{R}^n$  и обозначается  $(M)_r$ . Множество  $M$  называется  $r$ -выпуклым, если  $M = (M)_r$ .

**О п р е д е л е н и е 3.2.** Замкнутый шар  $\overline{E}_r(z) \triangleq \{z^* \in \mathbb{R}^n : \|z - z^*\| \leq r\}$  называется опорным к множеству  $M \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $z^{(0)} \in M$ , если внутри шара  $\overline{E}_r(z)$  нет точек  $M$  и  $z^{(0)}$  лежит на границе  $\overline{E}_r(z)$ .

В этом разделе класс рассмотрения множеств тот же, что и в предыдущем разделе. Изучаются плоские альфа-множества  $M \subset \mathbb{R}^2$ , границы  $\Gamma = \partial M$  которых принадлежат семейству кривых  $\{\Gamma\}_T$ . Доказанная выше теорема позволяет в частном случае установить количественную связь числовых характеристик альфа-множества с его оболочкой.

**Утверждение 3.1.** Если в условиях теоремы 2.1  $x^{(0)}$  — псевдовершина множества  $M$ , порожденная локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$ ,  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ , граница

$\Gamma = \partial M \in \{\Gamma\}_T$  определяется вектор-функцией  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  и  $L(x^{(0)})$  — от-  
вечающая псевдовершине ветвь биссектрисы, то радиус опорного шара к  $M$  в точке  
 $z(t_1) = (x_1, x_2) \in L(x^{(0)})$  вычисляется по формуле

$$r(z(t_1)) = \|\gamma'(t_1)\| \left| \frac{\langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle}{\det(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))} \right|. \quad (3.1)$$

**Доказательство.** Отправной точкой в обосновании формулы (3.1) является равенство (2.5). В знаменателе правой части этого равенства стоит квадрат расстояния от точки  $z(t_1) = (x_1, x_2) \in L(x^{(0)})$  до точки  $\gamma(t_1)$  — одной из двух проекций  $z(t_1) = (x_1, x_2)$  на множество  $M$ , т. е.  $\rho^2(x^*, \gamma(t_1))$  — это квадрат радиуса опорного шара (здесь опорного круга)  $\bar{E}_r(z(t_1))$  к  $M$  в точке  $\gamma(t_1)$ . Примем обозначение  $r = r(z(t_1))$ , подчеркивая тем самым зависимость радиуса опорного шара от выбора точки на биссектрисе. Тогда

$$r^2(z(t_1)) = \frac{\rho^2(x^*, \gamma(t_1))}{tg^2 \frac{\alpha(z(t_1))}{2}}.$$

Воспользуемся представлением (2.6) для числителя и формулой (2.8) для знаменателя этой дроби, сократим на общие отличные от нуля сомножители:

$$\begin{aligned} r^2(z(t_1)) &= \frac{\|\gamma'(t_1)\|^2 \det^2(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1)) \langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle^2}{\det^2(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1))) \det^2(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))} \\ &= \frac{\|\gamma'(t_1)\|^2 \langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle^2}{\det^2(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1)))}. \end{aligned}$$

После извлечения квадратного корня получим (3.1). □

#### 4. Пример вычисления меры невыпуклости, радиуса опорного шара и радиуса чебышевского слоя для невыпуклого множества с разрывной кривизной границы

**Пример 4.1.** В качестве множества  $M$  рассмотрим подграфик гладкой склейки двух скалярных функций

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & t < 0, \\ 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Граница  $\Gamma = \partial M$  множества  $M$  задается вектор-функцией  $\gamma(t) = (t, f(t))$ ,  $t \in T = \mathbb{R}$ . Касательный вектор  $\gamma'(t) = (1, f'(t))$  всюду отличен от нуля. При значении параметра  $t_0 = 0$  имеет место разрыв производной второго порядка вектор-функции,  $f''(t_0 - 0) = 2$ ,  $f''(t_0 + 0) = 0$ , т. е. здесь  $T_2 = \{0\} \subset T$ . Точка  $x^{(0)} \triangleq (t_0, f(t_0)) = (0, 0)$  — псевдовершина графика  $\Gamma = \text{gr } f$ . Локальный диффеоморфизм, отображающий левую полуокрестность точки  $t_0 = 0$  в ее правую полуокрестность, определяемый уравнением (1.3), найден в [14]:

$$t_2(t_1) = \frac{t_1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 + 4t_1^2} \right), \quad t_1 < 0. \quad (4.1)$$

Важно подчеркнуть, что диффеоморфизм (4.1) в этом примере параметризует всю область определения функции, т. е. он имеет нелокальную область рассмотрения, «охватывая» окрестность точки  $t_0 = 0$  максимально большого (бесконечного) радиуса. Биссектриса  $L$  содержит единственную ветвь  $L(x^{(0)})$ , ее параметрическое представление (см. [14])

$$L(x^{(0)}) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 = t_1 \frac{1 - \sqrt{1 + 4t_1^2}}{2}, x_2 = \frac{1}{4} + t_1^2 + \frac{\sqrt{1 + 4t_1^2}}{4}, t_1 < 0 \right\}. \quad (4.2)$$

Для отыскания меры невыпуклости множества воспользуемся формулой (2.8), которая применительно к графикам скалярных функций принимает вид:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \left| \frac{f(t_2(t_1)) - f(t_1) - (t_2(t_1) - t_1) f'(t_2(t_1))}{t_2(t_1) - t_1 + f'(t_2(t_1)) (f(t_2(t_1)) - f(t_1))} \right|.$$

Учитывая, что в данном примере вдоль диффеоморфизма выполняются тождества

$$f(t_2(t_1)) \equiv 0, \quad f'(t_2(t_1)) \equiv 0, \quad (4.3)$$

получим

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \left| \frac{-f(t_1)}{t_2(t_1) - t_1} \right| = \left| \frac{-t_1^2}{\frac{t_1}{2} (-1 - \sqrt{1 + 4t_1^2})} \right| = \left| \frac{2t_1}{1 + \sqrt{1 + 4t_1^2}} \right| = \frac{-2t_1}{1 + \sqrt{1 + 4t_1^2}}.$$

Тангенс монотонно растет, когда параметр  $t_1 \rightarrow -\infty$ , причем

$$\lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \operatorname{tg} \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \frac{-2t_1}{1 + \sqrt{1 + 4t_1^2}} = 1.$$

Отсюда мера невыпуклости подграфика рассматриваемой функции

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Далее найдем радиус опорного шара в фиксированной точке биссектрисы, например, при значении параметра  $t_1 = -\sqrt{2}$ . В силу (4.1) отвечающее ему значение параметра  $t_2 = t_2(t_1) = \sqrt{2}$ . Согласно (4.2) центром опорного шара является точка  $z(t_1) = (\sqrt{2}, 3)$ . Формула (3.1) для радиуса опорного шара на графиках скалярных функций принимает вид:

$$r(z(t_1)) = \sqrt{1 + (f'(t_1))^2} \left| \frac{t_2(t_1) - t_1 + f'(t_2(t_1)) (f(t_2(t_1)) - f(t_1))}{f'(t_2(t_1)) - f'(t_1)} \right|.$$

Поскольку выполняются тождества (4.3), то после подстановки (4.1) получим

$$\begin{aligned} r(z(t_1)) &= \sqrt{1 + (f'(t_1))^2} \left| \frac{t_2(t_1) - t_1}{-f'(t_1)} \right| = \sqrt{1 + 4t_1^2} \left| \frac{-\frac{t_1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4t_1^2})}{-2t_1} \right| \\ &= \sqrt{1 + 4t_1^2} \left| \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_1^2}}{4} \right| = \sqrt{1 + 4t_1^2} \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_1^2}}{4}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Таким образом,  $z(t_1) = (\sqrt{2}, 3)$  — центр опорного шара радиуса  $r(z(t_1)) = 3$ .

Интерес представляет задача поиска чебышевских слоев для невыпуклых множеств. В рассматриваемом примере, опираясь на формулу (4.4), можно найти величину (радиус) максимального чебышевского слоя [16]. Множество псевдовершин содержит единственную точку  $x^{(0)} = (0, 0) \in \Gamma$ , вследствие чего биссектриса  $L$  множества  $M$  исчерпывается одним одномерным многообразием  $L(x^{(0)})$ , здесь  $L = L(x^{(0)})$ . Крайняя его точка  $\bar{x}$  принадлежит замыканию

$$\bar{x} \in \overline{L(x^{(0)})} = \operatorname{supp} \varphi,$$

и может быть найдена предельным переходом в (4.2) при  $t_1 \rightarrow t_0 - 0$  (см. [14]). Соответственно, переходя к пределу в (4.4), находим радиус  $r_0 = r(z(t_0))$ ,  $t_0 = 0$ , максимального чебышевского слоя:

$$r_0 = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \sqrt{1 + 4t_1^2} \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_1^2}}{4} = \frac{1}{2}.$$

Тем самым найден диапазон изменения параметра  $r$ -оболочки, в котором множество остается  $r$ -выпуклым. Здесь  $M = (M)_r$ , когда  $0 < r \leq r_0 = \frac{1}{2}$ .

Иллюстрация описанной ситуации приведена на рис. 1. На нем изображены невыпуклое множество  $M$ , его псевдовершина  $x^{(0)} \in \partial M$ , биссектриса  $L(x^{(0)})$  с крайней точкой  $\bar{x} \in \overline{L(x^{(0)})}$ , центр опорного шара в некоторой точке  $x \in \overline{L(x^{(0)})}$  и ее метрические проекции  $\gamma(t_1)$  и  $\gamma(t_2)$  на  $M$ , а также максимальный чебышевский слой величины  $r_0 = \frac{1}{2}$ .

Говоря о приложениях, заметим, что развиваемые алгоритмы и процедуры отыскания меры невыпуклости замкнутого множества имеют практическое значение в задачах оптимального управления. Так, например, если рассматривать  $M$  в качестве целевого множества в плоской задаче управления по быстродействию для случая, когда динамика управляемого процесса определяется кругом единичного радиуса с центром в начале координат (см. [10]), то представленная на рисунке биссектриса  $L$  является сингулярным множеством функции оптимального результата. В точках этой кривой нарушается единственность оптимальных траекторий. В данном случае из каждой точки кривой  $L$  в направлении метрических проекций на целевом множестве сходят ровно две оптимальные траектории. При этом чебышевский слой величины  $r$ ,  $0 < r \leq r_0$ , является полосой, примыкающей к целевому множеству  $M$ , в котором функция оптимального результата сохраняет гладкость.

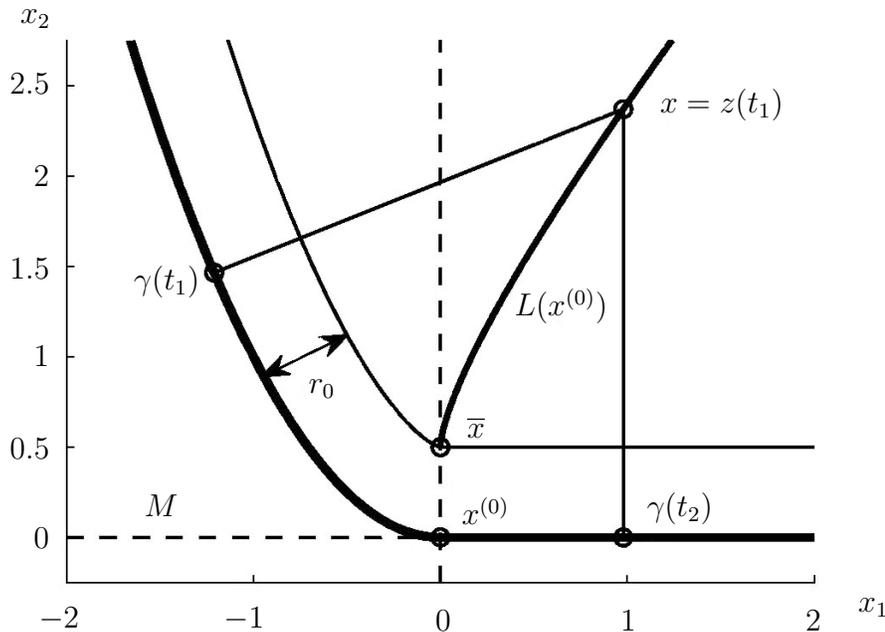


Рис. 1. Множество  $M$ , его биссектриса и максимальный чебышевский слой

## References

- [1] А. А. Успенский, В. Н. Ушаков, А. Н. Фомин,  $\alpha$ -множества и их свойства, Деп. в ВИНТИ 02.04.04, № 543–В2004, Ин-т математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, 2004, 62 с. [A. A. Uspenskii, V. N. Ushakov, A. N. Fomin,  $\alpha$ -sets and Their Properties, Dep. in VINITI 04.02.04, No. 543–В2004, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 2004, 62 pp.]
- [2] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, “Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества”, *ДАН СССР*, **127**:2 (1959), 254–257. [N. V. Efimov, S. B. Stechkin, “Support properties of sets in Banach spaces and Chebyshev sets”, *DAN USSR*, **127**:2 (1959), 254–257 (In Russian)].
- [3] Л. П. Власов, “Чебышевские множества и некоторые их обобщения”, *Матем. заметки*, **3**:1 (1968), 59–69; англ. пер.: L. P. Vlasov, “Chebyshev sets and some generalizations of them”, *Math. Notes*, **3**:1 (1968), 36–41.
- [4] Г. А. Иванов, *Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения*, Физматлит, М., 2006. [G. A. Ivanov, *Weakly Convex Sets and Functions: Theory and Applications*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian)].
- [5] М. В. Балашов, Е. Е. Иванов, “Свойства метрической проекции на множество, слабо выпуклое по Виалю, и параметризация многозначных отображений со слабо выпуклыми значениями”, *Матем. заметки*, **80**:4 (2006), 483–489; англ. пер.: M. V. Balashov, G. E. Ivanov, “Properties of the metric projection on weakly vial-convex sets and parametrization of set-valued mappings with weakly convex images”, *Math. Notes*, **80**:4 (2006), 461–467.
- [6] М. В. Балашов, “Условие Липшица метрической проекции в гильбертовом пространстве”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **22**:1 (2018), 13–29. [M. V. Balashov, “The Lipschitz property of the metric projection in the Hilbert space”, *Fundam. Prikl. Mat.*, **22**:1 (2018), 13–29 (In Russian)].
- [7] А. Р. Алимов, И. Г. Царьков, “Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения”, *УМН*, **71**:1(427) (2016), 3–84; англ. пер.: A. R. Alimov, I. G. Tsar’kov, “Connectedness and solarly in problems of best and near-best approximation”, *Russian Math. Surveys*, **71**:1 (2016), 1–77.
- [8] А. А. Успенский, П. Д. Лебедев, “On the set of limit values of local diffeomorphisms in wavefront evolution”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **272**:1 (2011), 255–270.
- [9] В. Н. Ушаков, А. А. Успенский, “Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **26**:1 (2016), 95–120. [V. N. Ushakov, A. A. Uspenskii, “ $\alpha$ -sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **26**:1 (2016), 95–120 (In Russian)].
- [10] П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, “Элементы аналитического конструктора решений в классе задач управления по быстрдействию с целевым множеством с разрывной кривизной границы”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:132 (2020), 370–386. [P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, “Elements of analytical solutions constructor in a class of time-optimal control problems with the break of curvature of a target set”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:132 (2020), 370–386].
- [11] А. А. Успенский, П. Д. Лебедев, “Выявление сингулярности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнений типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**:1 (2018), 59–73. [P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, “Elements of analytical solutions constructor in a class of time-optimal control problems with the break of curvature of a target set”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:132 (2020), 370–386 (In Russian)].
- [12] В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, А. Р. Матвийчук, “Об оценке степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем”, *Оптимальное управление и дифференциальные игры*, Сборник статей, Труды МИАН, **315**, МИАН, М., 2021, 261–270; англ. пер.: V. N. Ushakov, A. A. Ershov, A. R. Matviychuk, “On estimating the degree of nonconvexity of reachable sets of control systems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **315** (2021), 247–256.
- [13] Т. Бреккер, Л. Ландер, *Дифференцируемые ростки и катастрофы*, Мир, М., 1977. [T. Brecker, L. Lander, *Differentiable Germs and Catastrophes*, Mir Publ., Moscow, 1977 (In Russian)].

- [14] А. А. Успенский, “Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстродействия”, Тр. ИММ УрО РАН, **20**, 2014, 276–290; англ. пер.: А. А. Uspenskii, “Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **291**, suppl. 1:3 (2015), 239–254.
- [15] V. D. Sedykh, “On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in  $\mathbb{R}^k$ ”, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **43**, Singularity Theory and Its Applications (2006), 401–419.
- [16] М. И. Карлов, “Чебышевский слой многообразий в гильбертовом пространстве”, *Теория приближений. Гармонический анализ*, Сборник статей, посвященный памяти профессора Сергея Борисовича Стечкина, Труды МИАН, **219**, Наука, МАИК «Наука», М., 1997, 235–248; англ. пер.: М. I. Karlov, “Chebyshev layer of manifolds in a Hilbert space”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **219** (1997), 231–244.

### Информация об авторах

**Успенский Александр Александрович**, доктор физико-математических наук, заведующий сектором, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: uspen@imm.uran.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

**Лебедев Павел Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: pleb@yandex.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

Конфликт интересов отсутствует.

#### Для контактов:

Успенский Александр Александрович  
 E-mail: uspen@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.  
 Поступила после рецензирования 03.06.2024 г.  
 Принята к публикации 07.06.2024 г.

### Information about the authors

**Alexander A. Uspenskii**, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the sector, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: uspen@imm.uran.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

**Pavel D. Lebedev**, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: pleb@yandex.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

There is no conflict of interests.

#### Corresponding author:

Alexander A. Uspenskii  
 E-mail: uspen@imm.uran.ru

Received 02.04.2024  
 Reviewed 03.06.2024  
 Accepted for press 07.06.2024